Análisis de la variabilidad espacio-temporal y procesos caóticos en ciencias medioambientales
J.J. Ibáñez & C. Machado, eds.
1995 Geoforma Ediciones
Logroño

INTRODUCCIÓN A LAS TÉCNICAS DE ANÁLISIS DE SERIES TEMPORALES

J. CEBRIÁN & C.M. DUARTE

Centro de Estudios Avanzados de Blanes, CSIC Gerona

Este capítulo presenta una descripción sencilla de las principales técnicas de análisis temporal, desarrollando de una manera muy concisa el principio teórico de estas técnicas. Por ello remitimos a la lista de referencias incluidas para mayor información.

1. Objetivos del análisis de series temporales

Una serie temporal es un registro de observaciones de un proceso estocástico realizadas secuencialmente en el tiempo. Debido a que sólo es posible registrar una observación del proceso en un tiempo concreto, la serie temporal constituye una única realización de las infinitas que se podrían obtener del mismo proceso estocástico. El análisis temporal pretende evaluar el modelo de probabilidad que sigue la serie temporal generada y para ello persigue los siguientes objetivos:

(1) *Procesado de la serie*: el procesamiento de la señal temporal engloba técnicas de filtrado que permiten transformar la serie a fin de facilitar su análisis.
(2) *Modelización de la serie*: el ajuste de un modelo a la serie temporal permite la simulación de procesos similares, el pronóstico de valores futuros y la estimación de parámetros relevantes de la oscilación temporal.
(3) *Análisis frecuencial de la serie*: el análisis frecuencial trata de elucidar las frecuencias más importantes que explican la oscilación de series a las que es difícil ajustar un modelo temporal matemático.

Así que existen dos unidades de medida del análisis de las series temporales: la *unidad temporal* (por ejemplo, segundos, días, años,) y la *unidad frecuencial* (radianes o ciclos por unidad de tiempo). Dos tipos principales de técnicas componen el análisis basado en la unidad de tiempo: los *métodos descriptivos*, que tratan de explicar la serie temporal descomponiéndola en una tendencia, variaciones estacionales y fluctuaciones aleatorias, y los *métodos deductivos*, basados en la identificación, estimación y contraste de modelos matemáticos capaces de describir la serie temporal.

2. Métodos descriptivos de análisis temporal

Los métodos descriptivos dividen la variación de la serie temporal en los siguientes componentes:

$$Y_t = T_t + S_t + U_t \qquad (1)$$

donde Y_t es el valor de la serie en el instante t, T_t es la componente de tendencia en el instante t, S_t representa la componente estacional en el instante t y U_t es la variación aleatoria.

Las técnicas descriptivas no sólo pretenden analizar la importancia de cada uno de estos componentes, ya que también se utilizan para eliminar la variación temporal debida a la tendencia y a la estacionalidad. La eliminación de la tendencia y de la estacionalidad forma parte del procesado para obtener una serie estacionaria, condición en la que se basa la formulación de modelos matemáticos.

2.1. Análisis de la tendencia

La tendencia se define como la variación temporal del valor medio del registro:

$$Y_t = \partial + ß_t + E_t \qquad (2)$$

donde ∂ es una constante, $ß_t$ la tendencia de la serie y E_t una variable aleatoria con media cero y varianza constante.

Las técnicas más frecuentes para analizar ß son las siguientes:

(1) Una manera sencilla de estimar la tendencia es *representar el valor de la media de grupos consecutivos de valores*, todos con el mismo tamaño muestral. La representación obtenida permite estimar gráficamente el valor de ß. Si la serie muestra una estacionalidad clara, los datos se agrupan según el periodo de la variación estacional.

(2) Es frecuente intentar *ajustar una curva* en aquellas series donde la estacionalidad es prácticamente nula y la tendencia predomina sobre cualquier otro componente. Algunas de las ecuaciones más utilizadas son:

- la curva polinómica:	$Y_t = a + bt + ct^2 + dt^3 + ...$
- la ecuación de Gompertz:	$log\ Y_t = a - br^t$
- la curva logística:	$Y_t = a / (1 + be^{-ct})$

(3) El proceso de *filtrado de medias móviles* consiste en ajustar por separado una curva polinómica a intervalos progresivos de la serie temporal:

$$Y_t = \sum_{r=-q}^{+s} a_r X_{t+r} \qquad (3)$$

donde $[a_r]$ son los pesos del filtro.

El filtrado de medias móviles se utiliza para eliminar las variaciones estacionales del registro temporal, ajustando el número de valores promediados con el filtro al periodo de la oscilación que se desea eliminar.

El tipo de filtro así como los valores de los pesos dependen de los periodos de oscilación que se quieran eliminar y de los que se desee realzar. Existe una gran diversidad de filtros, diferiendo principalmente en los valores de los pesos y en las técnicas utilizadas para suavizar los valores iniciales y finales de la serie.

(4) La *diferenciación* de la serie facilita un método inmediato para eliminar la tendencia. Ocasionalmente es necesario diferenciar dos veces:

$$Y_t = X_{t+1} - X_t = \nabla X_{t+1}$$
$$Yt = \nabla^2 X_{t+2} = X_{t+2} - 2X_{t+1} + Xt \qquad (4)$$

2.2. Análisis de la estacionalidad

Se acostumbra a distinguir entre la estacionalidad aditiva y la estacionalidad multiplicativa:

$$Y_t = m_t + S_t + E_t \qquad (5.1)$$
$$Y_t = m_t \, x \, S_t + E_t \qquad (5.2)$$
$$Y_t = m_t \, x \, S_t \, x \, E_t \qquad (5.3)$$

donde m_t es la media en el tiempo t del registro en el cual se ha eliminado la estacionalidad, S_t es la componente estacional y E_t una variable aleatoria de media cero y varianza constante.

La primera expresión (5.1) corresponde a un modelo con estacionalidad aditiva, mientras que las dos restantes responde a un modelo multiplicativo.

La mayoría de las técnicas descriptivas utilizadas para valorar la componente estacional se basan en un modelo estacional aditivo. El tipo de estacionalidad se determina a partir de la observación atenta del gráfico de la serie temporal y alternativamente se puede representar el valor del registro frente a la componente estacional y estudiar la pendiente. En el caso de que E_t multiplique a $(m_t \, x \, S_t)$ (ecuación 5.3), bastará con una transformación logarítmica para obtener un modelo estacional aditivo.

En cambio, el primer modelo multiplicativo (ecuación 5.2) requiere de cálculos más elaborados (transformación de Box-Cox, ver figura 2) para ser transformado en un modelo aditivo.

Una vez tenemos el modelo aditivo, la estacionalidad se puede analizar de varias formas:

(1) La forma más inmediata de valorar la estacionalidad consiste en *promediar*, para cada uno de los puntos que componen el periodo estacional, *las diferencias* entre los valores correspondientes a un mismo punto del periodo estacional y el valor medio del ciclo en el que se halla cada valor.

(2) La estacionalidad se puede eliminar mediante el *filtrado de medias móviles*, adecuando el número de valores promediados por el filtro al periodo estacional que se desea eliminar (ecuación 3). Con datos mensuales que siguen una periodicidad anual, se suele utilizar el filtro siguiente:

$$Sm\ (xt) = \frac{1/2\ X_{t-6} + X_{t-5} + X_{t-4} + \ldots + X_{t+5} + 1/2 X_{t+6}}{12}$$

donde *Sm* es la serie suavizada tras eliminar la estacionalidad.

(3) Una técnica muy utilizada para eliminar la estacionalidad es la diferenciación de la serie con un retardo equivalente al periodo estacional:

$$Yt = \nabla_s X_t = X_t - X_{t-s}$$

3. Métodos deductivos de análisis temporal. Ajuste de modelos matemáticos

Los métodos deductivos intentan ajustar un modelo matemático a un proceso temporal estocástico a partir de la comparación de las características de la serie temporal considerada y de los modelos sugeridos y del análisis de los residuos no explicados por el modelo. El procedimiento se puede esquematizar como se muestra en la figura 1, que se comenta brevemente a continuación.

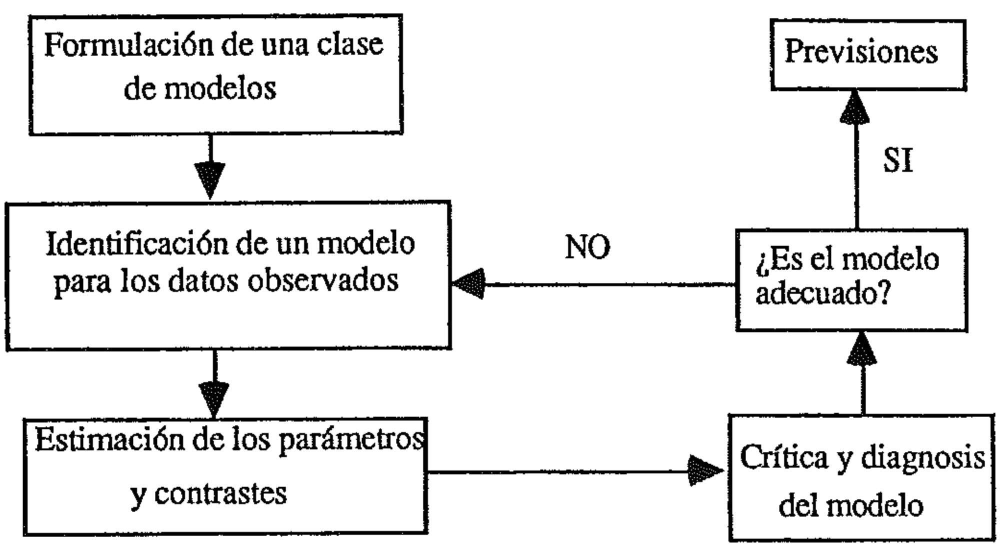

Figura 1. Esquema del procedimiento deductivo de ajuste de un modelo matemático a un proceso temporal estocástico.

3.1. Transformación de la serie temporal en estacionaria

El análisis temporal deductivo se basa en el carácter estacionario de la serie. Por lo tanto, el primer paso es asegurarnos que la serie posee un carácter estacionario.

3.1.1 Definición de una serie temporal estacionaria

Un proceso estacionario es aquel cuyas media y varianza son constantes a lo largo de todo el proceso y cuya covarianza depende sólo del retardo entre los valores:

$$\mu_t = \mu = cte$$
$$\varnothing_t = \varnothing = cte$$
$$Cov\ (t,\ t + k) = Cov\ (t,t\text{-}k) = \gamma_\kappa \quad \kappa = 0, \pm 1, \pm 2... \qquad (8)$$

3.1.2. Identificación de la estructura no estacionaria. Procesamiento para obtener una serie estacionaria

La inspección del carácter estacionario de una serie pasa por tres fases:

(1) *Determinar si la serie presenta una varianza constante*: el *diagrama rango-media* (figura 2) constituye el método más frecuente para evaluar cómo varía la varianza a lo largo del registro temporal. Consiste en la representación gráfica de la media y de la varianza para grupos consecutivos de valores de la serie. A partir de este diagrama se estima la pendiente *(1-b)* de la relación entre la varianza y la media. Una vez estimado el parámetro *b*, la transformación necesaria para estabilizar la varianza es (ecuación 9, transformaciones de Box-Cox):

$$Yt = \left| \begin{array}{ll} (X^{tb}\text{-}1)/b & b \neq 0 \\ \log Xt & b = 0 \end{array} \right|$$

(9)

(2) *Determinar si la media es constante*: el carácter variante de la media de la serie temporal es fácilmente detectable a partir de la *función de autocorrelación simple* de la serie (f.a.s.). Por función de autocorrelación simple de una serie temporal se entiende la variación de la correlación entre los valores de la serie en función del retardo.

Las series con una media no constante muestran una f.a.s. en la que los coeficientes de autocorrelación decrecen muy lentamente con el retardo (figura 3).

La estabilización de la media se obtiene *diferenciando la serie* (apartado 2.1). El número de diferenciaciones no suele ser más de dos. Normalmente se sigue el *criterio de Titner*, que consiste en diferenciar la serie hasta que su varianza aumente al diferenciarla de nuevo.

(3) *Determinar si la serie presenta un componente estacional*: la estacionalidad implica que la serie no sea estacionaria. Así que si la serie presenta una componente estacional habrá que diferenciar la serie con un retardo igual al periodo estacional que se desea eliminar (apartado 2.2).

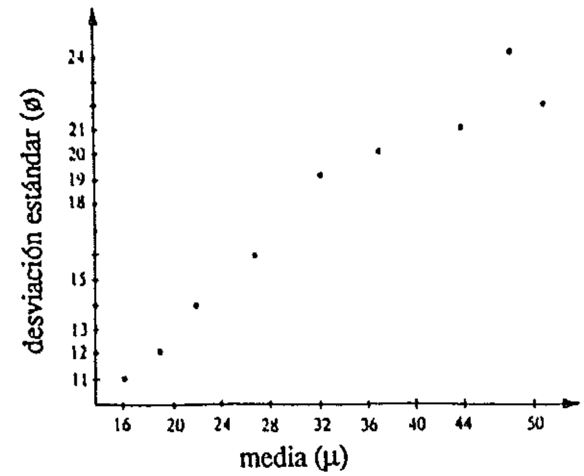

Figura 2. El diagrama Rango-Media es el método más utilizado para evaluar el carácter constante o no de la varianza a lo largo del registro temporal. ($\emptyset = \pi^{1-b}$).

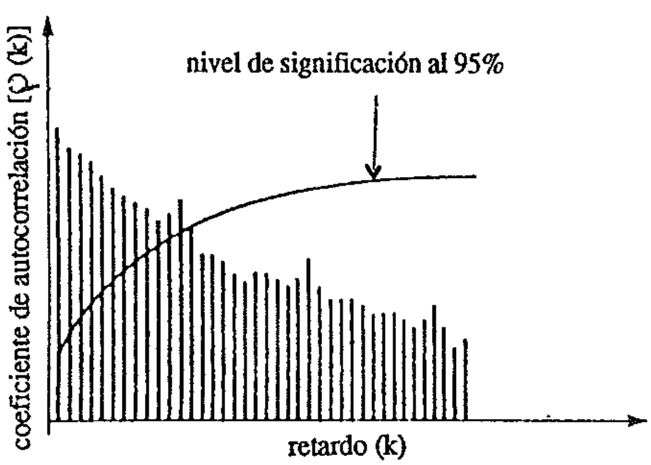

Figura 3. Función de autocorrrelación simple (f.a.s.) de una serie con media no constante: los coeficientes de autocorrelación decrecen muy lentamente con el retardo (k).

3.2. Ajuste del modelo matemático

3.2.1. Principales modelos matemáticos

Los principales modelos matemáticos utilizados para explicar la variación temporal de las series estacionarias se basan en dos tipos de procesos: los *procesos autoregresivos (AR)* y los *procesos de media móvil (MA)*. Un proceso de media móvil de orden q se define como:

$$Yt = \beta_0 Z_t + \beta_1 Z_{t-1} + ... + \beta q Zt\text{-}q \qquad (10)$$

donde β_i son constantes y *Zt* es un proceso aleatorio con media nula y varianza constante.

Por otra parte, un proceso autoregresivo de orden *p(AR(p))* se define como:

$$Yt = \partial X_{t-1} + ... + \partial_p X_{t-p} + Zt \qquad (11)$$

donde $[X_i]$ es el valor registrado en el tiempo i, $[\partial_i]$ son constantes y $[Z_t]$ es un proceso aleatorio con media nula y varianza constante.

Los *modelos ARMA* se obtienen al combinar ambos tipos de procesos. Por lo tanto, definimos un proceso ARMA de orden (p,q) como:

$$Yt = \partial X_{t-1} + ... + \beta_p X_{t-p} + Z_t + \beta_1 Z_{t-1} + ... + BqZt\text{-}q \qquad (12)$$

donde las variables y constantes se definen como en los procesos AR(p) y MA(q)

Cuando un modelo ARMA se ajusta a una serie temporal diferenciada, definiremos el *proceso ARIMA* como aquel que explica la serie original no estacionaria:

$$Wt = \nabla^d W_{t-1} = \partial_i X_{t-1} + ... + \partial_p W_{t-p} + Z_t + \beta_1 Z_{t-1} + ... + BqZt\text{-}q \qquad (13)$$

donde *d* es el grado de diferenciación aplicado a la serie original para transformarla en estacionaria. El modelo se denomina ARIMA (p,d,q).

Si la serie no estacionaria presenta variación estacional, podemos introducir tal estacionalidad en el modelo ARIMA (p,d,q) obteniendo entonces el proceso ARIMA (P,D,Q,)x(p,d,q), donde (P,p) y (Q,q) son respectivamente los coeficientes del proceso autoregresivo y del proceso de media móvil con sus componentes estacionales (letra mayúscula) y regular (letra minúscula), mientras *D* y *d* son, respectivamente, los grados de diferenciación estacional y regular para obtener el proceso estacionario.

3.2.2. Identificación del modelo. La función de autocorrelación espacial

La elección del modelo a ajustar se realiza a partir de la comparación de la f.a.s. y de la función de autocorrelación parcial (f.a.p.) de la serie temporal con las del modelo sugerido. A diferencia de la f.a.s., la f.a.p. mide la relación lineal entre observaciones separadas un retardo k con independencia de los valores intermedios. Así que la f.a.p. de un proceso AR de orden p tendrá p coeficientes no nulos, mientras que en el caso de un proceso MA de orden q, será la f.a.s. la que presente q coeficientes no nulos. En cambio, la f.a.s. de un proceso AR de orden p y la f.a.p. de un proceso MA de orden q presentarán una estructura decreciente exponencial.

Debido a la interacción entre los procesos AR (p) y MA (q), las f.a.s. y f.a.p. de los procesos ARMA (p,q) presentarán una estructura decreciente mezcla de funciones senoides y/o exponenciales. La tabla 1 recoge las principales características de la f.a.s. y la f.a.p. de los procesos AR(p), MA(q) y ARMA (p,q).

Los procesos ARMA son difíciles de identificar en la práctica. Conviene buscar modelos simples MA o AR de orden bajo que expliquen los rasgos obvios de la f.a.s. (coeficientes claramente significativos, pautas de decrecimiento geométricas o sinusoidales) y, a continuación, utilizar la f.a.p. para completar y confirmar los rasgos de la f.a.s.

Tabla 1. Caracterización de la f.a.s. y de la f.a.p. de los procesos AR(p), MA(q) y ARMA(p,q).

	f.a.s.	**f.a.p**
AR (p)	Muchos coeficientes no nulos que decrecen con el retardo como mezcla de exponenciales y senosoides	p primeros coeficientes no nulos y el resto 0
MA (q)	q primeros coeficientes no nulos y el resto 0	Muchos coeficientes no nulos que decrecen con el retardo como mezcla de exponenciales y senosoides
ARMA (p,q)	Decrecimiento hasta 0	Decrecimiento 0

Para la identificación de los procesos ARIMA estacionales (P,D,Q) x (p,d,q) es útil tener en cuenta varias características de su f.a.s. y su f.a.p. En cuanto a la f.a.s., (1) en los retardos bajos se observará únicamente la parte regular, mientras que en los retardos estacionales se observará básicamente la parte estacional y (2) alrededor de los retardos estacionales observaremos la "interacción" entre la parte regular y estacional que se manifestará en la repetición de la parte regular a ambos lados de cada retardo estacional.

En lo que respecta a la f.a.p., (1) en los primeros retardos aparecerá la f.a.p. de la estructura regular mientras que en los estacionales la f.a.p. estacional, y (2) a la derecha de cada coeficiente estacional aparecerá la f.a.p. de la parte regular y a la izquierda observaremos la f.a.s. de la parte regular.

3.3. Validación del modelo. Análisis de residuos

Los residuos se obtienen al restar el modelo ajustado a la serie temporal estacionaria. Se acepta que el modelo es apropiado para explicar la serie temporal, cuando los residuos resultantes siguen un proceso de ruido blanco. Esto implica que los residuos:

(1) tienen media cero y varianza constante
(2) no presentan correlación para ningún retardo
(3) se distribuyen normalmente N (0,1/N)

4. Análisis frecuencial

El análisis frecuencial es básicamente una modificación del análisis de Fourier para adaptarlo al estudio de procesos temporales estocásticos. Se utiliza frecuentemente con procesos difícilmente explicables por procedimientos deductivos matemáticos (ver apartado 3), ya que el análisis frecuencial no está condicionado por los múltiples parámetros que definen el modelo matemático temporal.

El análisis frecuencial requiere la eliminación previa de la tendencia y estacionalidad marcada por el registro temporal, ya que estos componentes tienen un profundo efecto en el resultado y podrían enmascarar otras oscilaciones relevantes de la serie temporal.

4.1. Fundamento matemático. Análisis de Fourier

El análisis de Fourier aproxima una función a una suma de senoides según la siguiente expresión: supongamos que la función *f(t)* definida en $(-\pi,\pi)$ cumple las siguientes condiciones: (1) es absolutamente integrable, (2) tiene un número finito de discontinuidades y (3) tiene un número finito de máximos y mínimos. Entonces *f(t)* se puede aproximar al sumatorio:

$$f(t) \sim (\alpha 0/2) + \quad +s\sum_{r=1}^{k} (ar\cos rt + b_r \operatorname{sen} rt) \qquad (14)$$

Supongamos ahora que tenemos una serie temporal que responde al modelo:

$$Yt = \pi + \partial \cos wt + \beta \operatorname{sen} wt + Zt \qquad (15)$$

donde *w* es la frecuencia angular, $[\mu, \partial, ß]$ son parámetros a estimar y *Zt* es un proceso estocástico con media cero y varianza constante.

Normalmente, el análisis frecuencial de los procesos temporales estocásticos no se realiza en un intervalo continuo de frecuencias, sino que se restringe a los valores *[2πp/N]*, donde $p = 1,\ldots,N/2$, que abarcan desde la menor $(2\pi/N)$ hasta la mayor frecuencia (π) que podemos ajustar a los valores de la serie temporal. Resolviendo la ecuación (15) para cada valor discreto de frecuencia, obtenemos:

$$Yt = a_0 + \sum_{r=1}^{(N/2)-1} [ap\cos(2\pi pt/N) + bp\operatorname{sen}(2\pi pt/N)] + aN/2\cos\pi t \qquad (16)$$

donde:

$$\begin{aligned} a_0 &= \bar{\bar{X}} \\ aN/2 &= \sum (-1)^t x_t/N \\ ap &= 2[\sum x_t\cos(2\pi pt/N]/N \\ bp &= 2[\sum x_t\operatorname{sen}(2\pi pt/N]/N \qquad p = 1\ldots.,(N/2)-1 \end{aligned} \qquad (17)$$

La ecuación (17) distribuye la varianza de la serie temporal entre las frecuencias $4\pi/N,..,\pi$, donde $2\pi/N$ se denomina el armónico p. La amplitud y la fase del armónico p corresponden a:

$$Rp = (ap^2+bp2)^{1/2} \text{ amplitud}$$
$$\Omega = \tan^{-1} (-b_p/a_p) \text{ fase} \qquad (18)$$

El teorema de Parseval permite estimar la contribución de cada armónico a la varianza total de la serie:

$$\Sigma\, (xt-x)^2/N = \sum_{p=1}^{(N/2)-1} Rp^{\,2/2} + a_{N/2}{}^2 \qquad (19)$$

donde $R_p{}^2/2$ es la varianza en el rango $w_p < \pi/N$.

Podemos representar un histograma en el cual la varianza de cada armónico se iguale al área del rectángulo centrado en el armónico correspondiente. Entonces se deduce:

$R_p{}^2/2$ = área del rectángulo del armónico p = altura del rectángulo x $2\pi/N$

altura del rectángulo = $NR_p{}^2/4\pi$ (20)

El periodograma ($I(wp)$) se define como la representación de $NR_p{}^2/4\pi$ en función de la frecuencia del armónico correspondiente.

4.2. Funciones de distribución y densidad espectral

El análisis frecuencial persigue caracterizar las funciones de distribución espectral (F.D.E.) y de densidad espectral (f.d.e.), que definen las frecuencias de oscilación de un proceso temporal estocástico. Estas funciones se definen de la siguiente manera: dado un proceso temporal estocástico estacionario, cuya función de autocovarianza es γ(k), existen dos funciones monótonas crecientes tal que:

$$\gamma(k) = \int_0^{\kappa} \text{conswk } dF(w) \text{ y } f(w) = dF(W)/dw \qquad (21)$$

donde $F(w)$ = F.D.E. y $f(w)$ = f.d.e. $F(wo)$ expresa la varianza de la serie temporal explicada por oscilaciones con frecuencias contenidas en el intervalo $(0,w_o)$, mientras que $f(w_0)$ se interpreta como la varianza explicada por el intervalo $(w_0 \pm dw)$.

La base del análisis frecuencial está en que tanto la f.d.e. como el periodograma ($I(wp)$) se pueden expresar como la transformada de Fourier de la función de autocovarianza (γ(k)) del proceso temporal estocástico:

$$f(w) = 1/\pi\, [\gamma(0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \gamma(k) \text{ coswk}] \qquad (22a)$$

$$I(wp) = 1/\pi\ [\gamma(0) + 2 \sum_{k=1}^{N-1} \gamma(k) \cos wk] \qquad (22b)$$

Casi todos los métodos utilizados para valorar la f.d.e. se pueden reducir a técnicas para estimar la función de autocovarianza y/o periodograma. A continuación se comentan brevemente.

4.3. Estimación de la f.d.e.

4.3.1. Transformación de la función de autocovarianza truncada

Debido a que la precisión de $\gamma(k)$ disminuye al aumentar el retardo, se acostumbra a reducir el número de retardos así como a dar menos peso a los valores de $\gamma k)$ a medida que aumenta el retardo. Esto se consigue, respectivamente, mediante el truncamiento del retardo y utilizando ventanas temporales, y se expresa con el estimador:

$$f(w) = 1/\pi\ [\lambda_0\gamma(0) + 2 \sum_{k=1}^{M} \lambda_k\, \gamma(k) \cos wk] \qquad (23)$$

donde $[\lambda_k]$ es la ventana temporal y M es el punto de truncamiento.

Algunos ejemplos de ventanas temporales clásicas son las ventanas de Turkey, Hanning, Hamming y Parze. Existe un amplio repertorio de ventanas temporales en función de los resultados concretos que se quieran alcanzar. Por otra parte, la elección de M debe recaer en una solución de compromiso, ya que al reducir M, disminuye la varianza del estimador (ecuación 23) pero aumenta el sesgo, con lo que algunos picos relevantes de $f(w)$ pueden aparecer tan suavizados que sean inapreciables. Normalmente se suele tomar un valor de M próximo a $2/(N)^{1/2}$.

En algunas ocasiones conviene transformar la ventana temporal con una transformada de Fourier y obtener su equivalente frecuencial. En concreto, es más sencillo apreciar las propiedades de la ventana cuando se representa en su forma frecuencial, ya que la amplitud de la ventana será inversamente al valor de M.

4.3.2. Suavizado del periodograma

El periodograma es un estimador de f.d.e. centrado pero no consistente. La técnica más utilizada para reducir la varianza de $I(w_j)$ consiste en suavizar la función mediante un proceso de media móvil:

$$f(w) = 1/m \sum_{j} I(wj) \qquad (24)$$

donde m es el número de valores promediados. La elección de m también busca un balance entre la varianza y el sesgo del estimador (ecuación 24). A diferencia de M, la varianza disminuye con un m mientras que el sesgo aumenta. los valores de m utilizados suelen ser próximos a $N/40$.

La resolución de la transformada de Fourier se suele llevar a cabo mediante la técnica desarrollada por Tukey y Sandy ("transformada rápida de Fourier") con la que se reduce el número de operaciones de $N^2/2$ a $N(s+r/2)$ donde $N = r \times s$ es el número de datos.

La máxima frecuencia que se puede registrar en una serie temporal se denomina *frecuencia de Nyquist*, y corresponde a π/At, donde t es el intervalo temporal de muestreo. Así que si la f.d.e. no se anula al acercarnos a esta frecuencia, el intervalo temporal de muestreo es demasiado grande para registrar las frecuencias mayores de oscilación del proceso muestreado, y será necesario repetir el registro aumentando el valor π/At. Además, en caso que la f.d.e. no se anule alrededor de la frecuencia de Nyquist, es probable que nuestro registro se vea afectado por un fenómeno de "*aliasing*", causado por la interferencia de frecuencias mayores a la de Nyquist con las frecuencias registradas en la f.d.e.

5. Procesos bivariantes

Los procesos bivariantes consideran dos series temporales registradas simultáneamente, y tratan de analizar la relación entre ellas. Al igual que el estudio de los procesos univariantes, las técnicas utilizadas se basan en la unidad temporal (segundos, días, años) o en la unidad frecuencial (radianes o ciclos por unidad de tiempo).

5.1. Análisis temporal de procesos estocásticos bivariantes

Pretende la estimación de las funciones de covarianza y correlación entre los dos procesos considerados, denominadas respectivamente *función de covarianza cruzada* (ecuación 25) y *función de correlación cruzada* (ecuación 26).

$$\gamma_{xy}\ (t,k) = \mathrm{Cov}\ (Xt, Yt+k) \text{ función de covarianza cruzada} \qquad (25)$$

$$\varnothing_{xy}\ (k) = \gamma_{xy}\ (t,k)/[\gamma_{xx}\ (0)\ \gamma_{yy}\ (0)] \qquad (26)$$

donde $\gamma_{xx}(0)$ y $\gamma_{yy}(0)$ son respectivamente las covarianzas de los procesos X e Y.

La utilización de ambas funciones para valorar la relación entre dos series temporales requiere la conversión previa de ambas series a procesos de ruido blanco, ya que las funciones de covarianza cruzada y de correlación cruzada pueden reflejar relaciones espúreas debidas a la dependencia entre los componentes aleatorios de las series temporales consideradas.

Tras la conversión de las series a procesos a ruido blanco, sabiendo que la esperanza y la varianza de la función de correlación entre dos procesos de ruido blanco son cero y $1/N$ respectivamente, donde N es el número de datos, los coeficientes de correlación significativos serán aquellos que sobrepasen el intervalo de confianza $\pm 2/N^{1/2}$.

5.2. Análisis frecuencial de procesos estocásticos bivariantes

Siguiendo la analogía con los procesos univariantes, el análisis frecuencial de procesos bivariantes pretende estimar la función de densidad espectral entre las dos series temporales (función de densidad espectral cruzada), que se define como la transformada de Fourier de la función de covarianza cruzada:

$$f_{xy}(w) = 1/\pi[\Sigma\gamma\, xy\, (k)\, e^{-iwk}] = \partial_{xy}\, (w)\, e^{i\varnothing xy}\, (w) \qquad (27)$$

donde $\partial(w)$ corresponde a la amplitud y $\varnothing(w)$ a la fase.

La relación entre los componentes frecuenciales de dos series temporales es más fácilmente interpretable a partir de la coherencia (*C(w)*) y de la función de ganancia (*Gxy(w)*), que se expresan como:

$$C(w) = \partial_{xy}{}^2(w)/[f_x(w)f_y(w)],\ 0 \leq C(w) \leq 1$$
$$G_{xy}(w) = \partial_{xy}(w)/f_x(w) \qquad (28)$$

La coherencia mide el cuadrado de la correlación lineal entre los componentes con la misma frecuencia en ambas series temporales, mientras que la función de ganancia se interpreta como el coeficiente de regresión del proceso *Y* en función del proceso *X*.

Análogamente a la estimación de la f.d.e. (ver apartado 4.3), lo métodos para estimar la función de densidad espectral cruzada se basan en la función de covarianza cruzada truncada o en el suavizado del periodograma cruzado, ambos estimadores definidos como en el caso univariante.

Referencias

Anderson, T. (1971): *The Statistical Analysis of Time Series.* Wiley, Nueva York.

Chatfield, C. (1989): *The Analysis of Time Series. An Introduction.* Chapman and Hall, Nueva York. 241 pp.

Cox, D.R. (1981): Statistical analysis of time series. *Scand. J. Statist.*, 8: 93-115.

Gardner, E. & McKenzie, E. (1985): Forcasting trends in time series. *Man. Sci.*, 31: 1237-1246.

Gotmann, J.M. (1981): *Time Series Analysis.* Cambridge University Press, Cambridge.

Granger, C.W. & Hatanaka, M. (1964): *Spectral analysis of economic time series.* Pricenton University Press, Pricenton.

Hannan, E.J. (1970): *Multiple Time Series.* Wiley, Nueva York.

Jenkins, G. & Watts, D. (1968): *Spectral Analysis and its applications.* Holden-Hay, San Francisco.

Priestley, M.B. (1981): *Spectral Analysis and Time Series.* Vol. 1 y 2. Academic Press, Londres.